

DISEÑO Y EVALUACIÓN DE UN CONTROLADOR DE POSICIÓN ÓPTIMO VÍA ALGORITMO GENÉTICO

CONTROLADOR ÓPTIMO VÍA ALGORITMO GENÉTICO

AUTORES: Henry Bory Prevez¹

José Reinaldo de León Montoya²

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: bory@uo.edu.cu

Fecha de recepción: 11-07-2018

Fecha de aceptación: 09-08-2018

RESUMEN

En la asignatura Accionamientos Eléctricos un tema importante es el control de posición de tiempo continuo empleando máquinas de corriente directa. Los estudiantes presentan dificultades en la realización de estos diseños, aún más en sistemas multivariables, por lo que en el presente trabajo se diseñó un controlador óptimo lineal cuadrático (LQR) para controlar la posición angular de un sistema electromecánico multivariable empleando las funciones de la caja de herramienta de control óptimo de MatLab. Se comenzó modelando al electromecanismo y se obtuvo su descripción en el espacio de estado. Luego se chequeó la condición de controlabilidad del modelo matemático y se diseñó el controlador LQR en el que se incrementó el orden del sistema para incluir acción integral con estructura anti-saturación (anti-windup) por cálculo hacia atrás. Los parámetros de sintonía del controlador LQR, matrices Q y R, fueron determinados empleando Algoritmo Genético usando como función de ajuste la integral de la suma de los valores absolutos de los errores de seguimiento a referencias en formas de escalón y se diseñó un observador de orden mínimo. Finalmente se evaluó el desempeño del controlador dinámico diseñado ante cambios en la referencia, la utilidad de la estructura anti-saturación y perturbación vía simulación.

PALABRAS CLAVE: Control óptimo; algoritmo genético; sistema multivariable.

DESIGN AND EVALUATION OF AN OPTIMAL POSITION CONTROLLER VIA GENETIC ALGORITHM

ABSTRACT

In the Electric Drives lesson an important topic is the position control employing direct current machine. The students present difficulties in carrying out these designs, the difficulties are increasing even more in multivariable systems, for which in the present work is designed a quadratic linear optimal controller (LQR) to control the angular position of a multivariable electromechanical system using MatLab's optimal control toolbox functions. It began modeling to

¹ Ingeniero en Control Automático, Maestro en Automática, Profesor Auxiliar a tiempo completo del Departamento de Control Automático, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba, correo: bory@uo.edu.cu

² Licenciado en Educación Rama Eléctrica especialidad Energía, Profesor Auxiliar a tiempo completo del Departamento de Control Automático, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba, correo: jleon@uo.edu.cu

the electromechanism and is obtained a description in the state space. Next is checked the controllability condition of the mathematical model and is designed the LQR controller, that in it is incremented the system order to add integral action with anti-windup structure for back-calculation. The controller LQR set parameters, Q and R matrix, were calculated employing Genetic Algorithm using like fitness function the integral of the sum of the step signals reference tracking error absolute value and was designed a minimum order observer. Finally is evaluated via simulation the performance of the controller design for changes in the reference, the utility of the anti-windup structure and disturbance.

KEYWORDS: Optimal control; genetic algorithm; multivariable systems.

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de cuarto año de la carrera de Automática en el segundo semestre reciben la asignatura Accionamientos Eléctricos (Bory, 2011; Bory, 2016). En ésta se imparte el Tema Accionamiento Eléctrico Automatizado, en el cual se estudian los sistemas automatizados de dirección (SAD) tanto para sistemas electromecánicos de corriente directa (CD) como de corriente alterna (CA) de tiempo continuo (Bory, 2011; Bory, 2016). El objetivo del diseño de estos SAD de tiempo continuo es la regulación de coordenadas mecánicas, dígame velocidad o posición, ante variaciones del par de carga o como servomecanismos, las coordenadas deben alcanzar el valor de la referencia. (Costa Bonne, 1989; Morera, 1994; Bory, 2011; Bory, 2016).

Actualmente los estudiantes presentan dificultades para realizar el diseño de estos SAD, aún empleando la Teoría de Control Clásica (Mazaira, 2011 a) y por supuesto, aún más al utilizar la Teoría de Control Moderna (Mazaira, 2011 b), de la cual en la literatura básica (Costa Bonne, 1989; Morera, 1994) y las complementarias hay escasa información y ya poseen varios años.

Los estudiantes reciben en el transcurso de la carrera asignaturas como Ingeniería de Control II y Control de Procesos (Mazaira, 2011 b; Bauza, 2011), en las que se aplica la Teoría de Control Moderna al análisis y diseño de control de procesos tecnológicos multivariables, creándoles a éstos las siguientes curiosidades: ¿existen accionamientos eléctricos que puedan ser considerados sistemas multivariables? y ¿cómo se diseñaría un controlador multivariable para estos accionamientos eléctricos?, conocimientos de los que los estudiantes carecen y luego algunos necesitan para el desarrollo de su trabajo de diploma o en su desempeño como profesional.

Las características mecánicas de las cargas mecánicas analizadas en Accionamientos Eléctricos son: de par constante, par proporcional a la velocidad, par proporcional al cuadrado de la velocidad o carga tipo ventilador y de potencia constante (Costa Bonne, 1989; Morera, 1994). Estas cargas son definidas respecto a la coordenada velocidad, quedando la siguiente interrogante no existen cargas cuyo par sea proporcional a la posición angular del eje de la máquina, la respuesta es positiva y ejemplo de estas son las que poseen elasticidad que pueden ser modeladas mediante resortes como se analizan en los artículos (Smilgevičius Rinkevičienė Savickienė, 2006; Szabat Orłowska-Kowalska, 2008; Thomsen Hoffmann Wilhelm, 2011).

Los estudiantes no conciben que los dispositivos de fricción viscosa, como los analizados en los cursos de Física (Halliday Resnick Krane, 2003; Sears y otros, 2008) y que están presentes en electromecanismos (Bory Chang, 2015), puedan transmitir movimiento entre sus partes y por tanto afectar el estado mecánico de los mecanismos acoplados mediante estos.

Es por las razones anteriores que se creó el sistema electromecánico multivariable como banco de prueba vía simulación, que se presentará en la sección Desarrollo, y que se ha tratado en (Bory Chang Yero, 2014; Bory Chang, 2016; Bory Chang Santos, 2016).

En este artículo se emplea la Teoría de Control Moderna por las siguientes ventajas: es un método de análisis y diseño en el dominio temporal, es más general que la Teoría de Control Clásica y, sobre todo, muy útil para sistemas multivariables.

Se selecciona para el diseño del controlador multivariable el control óptimo lineal cuadrático (LQR) porque: permite diseñar sistemas de control óptimos; la selección de la matriz de ganancia del controlador es basada sobre un criterio, el índice de comportamiento; y a diferencia de la asignación de polos para sistemas multivariables la matriz de ganancia es única. (Chen, s/f; Ogata, 2010)

Aunque el método de diseño LQR fue creado en la década de los 80's (Chen, s/f; Ogata, 2010), aún es empleado en la actualidad para el diseño de controladores óptimos de tiempo continuo para sistemas electromecánicos, como puede encontrarse en (Hespanha, 2007; Silva Maass Vargas, 2014; Chen y otros, 2014; Nagarkar Vikhe, 2016).

El inconveniente fundamental del método de diseño de controladores LQR es que no existe criterio para escoger los parámetros de sintonía del controlador, las matrices diagonales Q y R, que permitan lograr el desempeño deseado del sistema a lazo cerrado (Chen, s/f; Ogata, 2010). En (Hespanha, 2007) se expone la regla de Bryson, útil para hacer una selección inicial de estas matrices y luego mediante un proceso de repetitivo de prueba y error cambiar los elementos de estas matrices hasta lograr el desempeño deseado. Para superar esta dificultad se emplea el Algoritmo Genético (AG) en el que los genes son los elementos de las matrices Q y R para mediante un proceso de optimización determinar las matrices Q y R que permitan lograr el desempeño deseado del sistema de control. Los AG gozan de prestigio por los excelentes resultados en los ajustes de controladores y en otras áreas como lo demuestran los artículos (Hernández y otros, 2011; Espitia Sierra, 2013; Acevedo Fonseca Gómez, 2014; Kadlic Sekaj Pernecký, 2014; López, 2014; Nagarkar Vikhe, 2016; Vera Morán, (s/f)). Las ventajas de la optimización mediante AG respecto a la optimización clásica son: no se necesita conocer un estimado inicial, el algoritmo no se queda atrapado en un mínimo local y la función objetivo puede ser o no discontinua (Ayuda del MatLab 7.12).

Como se desea diseñar un sistema de control multivariable en el que cada salida siga a su respectiva referencia, servomecanismo, en forma de escalón, por ser esta una entrada brusca, se añade acción integral, útil para lograr error nulo a estado estacionario y aumentar la robustez del sistema pero que tiene el efecto negativo de saturación (windup) cuando las salidas de los actuadores están acotadas. Debido a lo anterior, se propone el uso de estructura anti-saturación (anti-windup) por cálculo hacia atrás (Izadbakhsh y otros, 2011; Hwi-Beom Jong-Gyu, 2012; Neto Damo Coelho, 2012).

Otro aspecto que causa curiosidad a los estudiantes es el diseño de observadores de estado de orden completo y sobre todo de orden mínimo aplicado a sistemas multivariables electromecánicos.

La herramienta para el diseño de sistemas de control por las facilidades que posee en su Caja de Herramienta de Control es el MatLab como es demostrado por su gran aplicación actual en trabajos como (Szabat Orłowska-Kowalska, 2008; Hernández y otros, 2011; Izadbakhsh y otros,

2011; Thomsen Hoffmann Wilhelm, 2011; Neto Damo Coelho, 2012; Espitia Sierra, 2013; Kadlic Sekaj Pernecký, 2014; López, 2014; Robet Gautier, 2014; González, 2015; Vera Morán, (s/f)).

Es por lo anterior, que el objetivo de este trabajo es diseñar y evaluar mediante simulación usando MatLab un controlador óptimo dinámico LQR ajustado mediante AG con acción integral y estructura anti-saturación con observador de orden mínimo para controlar la posición angular de un sistema electromecánico multivariable.

La contribución de este trabajo es crear un material que sirva de bibliografía actualizada a los estudiantes y motivarlos por las técnicas modernas de control, así como que sepan emplear para el diseño las funciones de la caja de herramienta de control óptimo de MatLab.

DESARROLLO

El sistema electromecánico multivariable al cual se le diseñará un controlador dinámico es el mostrado en la Figura 1.

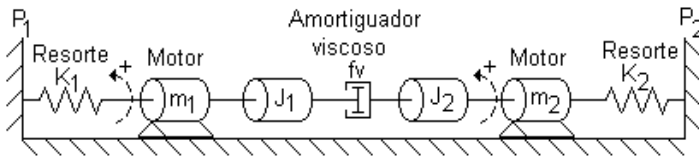


Figura 1. Esquema del sistema electromecánico.

El accionamiento mostrado en la Figura 1 está compuesto por dos máquinas de CD de excitación separada, denominadas m_1 y m_2 que serán operadas fundamentalmente como motor. El motor m_1 tiene el lado izquierdo de su eje unido a un resorte K_1 de constante elástica $k_1 = 1.0 \text{ Nm/rad}$, y su lado derecho está acoplado mediante una barra rígida a un cilindro macizo de momento de inercia $J_1 = 0.6 \text{ kgm}^2$. El motor m_2 tiene el lado derecho de su eje unido a un resorte K_2 de constante elástica $k_2 = 2.5 \text{ Nm/rad}$, y su lado izquierdo está acoplado mediante una barra rígida a un cilindro macizo de momento de inercia $J_2 = 1.5 \text{ kgm}^2$. Ambos cilindros se acoplan entre sí a través de un amortiguador viscoso de coeficiente viscoso $f_v = 5.0 \text{ Nms/rad}$. El extremo izquierdo del resorte K_1 y el derecho del resorte K_2 están unidos a las paredes rígidas P_1 y P_2 respectivamente. Los arcos discontinuos con flechas indican el sentido positivo de referencia para los torques y las posiciones angulares.

Los datos y parámetros de m_1 son: tensión nominal en los terminales $V_{m1} = 120 \text{ V}$, corriente nominal de armadura $I_{an1} = 10 \text{ A}$, velocidad angular nominal $w_{n1} = 126 \text{ rad/s}$, potencia nominal $P_{n1} = 1.10 \text{ kW}$, resistencia de armadura $R_{a1} = 0.5 \Omega$ y momento de inercia $J_{m1} = 0.4 \text{ kgm}^2$.

Los datos y parámetros de m_2 son: tensión nominal en los terminales $V_{m2} = 120 \text{ V}$, corriente nominal de armadura $I_{an2} = 15 \text{ A}$, velocidad angular nominal $w_{n2} = 168 \text{ rad/s}$, potencia nominal $P_{n2} = 1.65 \text{ kW}$, resistencia de armadura $R_{a2} = 0.333 \Omega$ y momento de inercia $J_{m2} = 0.5 \text{ kgm}^2$.

Para caracterizar completamente a m_1 y m_2 , se calcula cada $k_a \phi$ empleando las siguientes ecuaciones (Costa Bonne, 1989).

$$k_a \phi = \frac{V_{m1} - R_{a1} I_{an1}}{w_{n1}} = \frac{120 \text{ V} - 0.5 \Omega \cdot 10 \text{ A}}{126 \text{ rad/s}} = 0.9127 \frac{\text{Vs}}{\text{rad}} \quad (1)$$

$$k_a \phi_2 = \frac{V_{m2} - R_{a2} I_{an2}}{w_{n2}} = \frac{120V - 0.333\Omega \cdot 15A}{168 \text{ rad/s}} = 0.6845 \frac{Vs}{\text{rad}} \quad (2)$$

Estas máquinas son alimentadas a través de amplificadores de ganancias $K_{c1} = K_{c2} = 13$. La tensión de entrada a cada uno de estos amplificadores es $u_1(t)$ y $u_2(t)$, en volt, respectivamente y son las entradas al sistema.

Las variables a controlar del sistema son la posición angular del eje de cada motor.

Para modelar matemáticamente al sistema electromecánico se hacen las consideraciones siguientes:

- El acoplamiento entre el rotor de cada motor y su respectivo cilindro es rígido, lo que permite tratarlos como un cuerpo único.
- Los momentos de inercia de los resortes son despreciables con respecto a los momentos de inercia de cada motor y cada cilindro.
- Para las deformaciones dadas a los resortes estos mantienen una característica torque elástico contra deformación lineal.
- En el amortiguador la fricción viscosa posee una característica lineal respecto a la velocidad y los momentos de inercia de sus partes mecánicas son despreciables respecto a los momentos de inercia de cada motor y cada cilindro.
- Las inductancias de armadura de m_1 y m_2 son despreciables.

A continuación se determinan las ecuaciones mecánicas de las máquinas, empleando la segunda Ley de Newton aplicada a la dinámica de la rotación (Halliday Resnick Krane, 2003; Sears y otros, 2008).

$$J_{T1} \ddot{\theta}_1 = -k_1 \theta_1 - f_v \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \right) + M_{em1} \quad (3)$$

$$J_{T2} \ddot{\theta}_2 = -k_1 \theta_2 - f_v \left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 \right) + M_{em2} \quad (4)$$

donde:

$J_{T1} = J_{m1} + J_1 = 1 \text{ kgm}^2$ momento de inercia total en el eje de m_1 .

$J_{T2} = J_{m2} + J_2 = 2 \text{ kgm}^2$ momento de inercia total en el eje de m_2 .

θ_1, θ_2 posiciones angulares de los ejes de m_1 y m_2 respectivamente, rad.

$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ velocidades angulares de m_1 y m_2 respectivamente, rad/s.

$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ aceleraciones angulares de m_1 y m_2 respectivamente, rad/s^2 .

M_{em1}, M_{em2} torques electromagnéticos desarrollados por m_1 y m_2 respectivamente, Nm.

El resto de los parámetros ya han sido definidos previamente.

Las ecuaciones eléctricas de m_1 y m_2 se obtienen aplicando la Ley de Kirchhoff de las tensiones a sus armaduras (Costa Bonne, 1989).

$$V_{t1} = R_{a1}i_{a1} + k_a\phi_1\omega_1 \quad (5)$$

$$V_{t2} = R_{a2}i_{a2} + k_a\phi_2\omega_2 \quad (6)$$

donde:

V_{t1} , V_{t2} tensiones instantáneas aplicadas en los terminales de armadura de m_1 y m_2 , V.

i_{a1} , i_{a2} intensidades de las corrientes de armadura de m_1 y m_2 , A.

ω_1 , ω_2 velocidades angulares de m_1 y m_2 , rad/s.

La relación, según (Costa Bonne, 1989), entre la corriente de armadura y el torque electromagnético en cada máquina es:

$$M_{em1} = k_a\phi_1i_{a1} \quad (7)$$

$$M_{em2} = k_a\phi_2i_{a2} \quad (8)$$

Despejando i_{a1} en (5), sustituyéndola en (7) y luego sustituyendo la ecuación resultante en (3), se obtiene:

$$J_{T1}\ddot{\theta}_1 = -k_1\theta_1 - f_v\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right) - \frac{k_a\phi_1^2}{R_{a1}}\dot{\theta}_1 + \frac{k_a\phi_1}{R_{a1}}V_{t1} \quad (9)$$

Relacionando la tensión $V_{t1}(t)$ con la tensión de entrada del amplificador, $u_1(t)$, dividiendo (9) por J_{T1} y organizando los términos se tiene:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{k_1}{J_{T1}}\theta_1 - \frac{f_v R_{a1} + k_a\phi_1^2}{J_{T1}R_{a1}}\dot{\theta}_1 + \frac{f_v}{J_{T1}}\dot{\theta}_2 + \frac{k_a\phi_1}{J_{T1}R_{a1}}k_{c1}u_1 \quad (10)$$

Siguiendo un procedimiento similar para m_2 se obtiene:

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{k_2}{J_{T2}}\theta_2 + \frac{f_v}{J_{T2}}\dot{\theta}_1 - \frac{f_v R_{a2} + k_a\phi_2^2}{J_{T2}R_{a2}}\dot{\theta}_2 + \frac{k_a\phi_2}{J_{T2}R_{a2}}k_{c2}u_2 \quad (11)$$

Las ecuaciones (10) y (11) demuestran que estas están acopladas, acoplamiento debido al dispositivo de fricción viscosa.

Para describir al sistema electromecánico en el espacio de estado, se definen las variables de estado como: $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ y las variables de salidas como: $y_1 = \theta_1$ y $y_2 = \theta_2$, con lo cual se obtienen las siguientes ecuaciones, de estado y de salida (Kuo, 1996; Khalil, 1996; Chen, s/f; Ogata, 2010).

$$\underline{y} = C \underline{x} + D \underline{u} \quad (13)$$

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T, \quad \underline{u} = [u_1 \quad u_2]^T, \quad \underline{y} = [y_1 \quad y_2]^T, \quad \text{ }^T \text{ es el operador transpuesta.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J_{T1}} & -\frac{f_v R_{a1} + k_a \phi_1^2}{J_{T1} R_{a1}} & 0 & \frac{f_v}{J_{T1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{f_v}{J_{T2}} & -\frac{k_2}{J_{T2}} & -\frac{f_v R_{a2} + k_a \phi_2^2}{J_{T2} R_{a2}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_a \phi_1}{J_{T1} R_{a1}} k_{c1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_a \phi_2}{J_{T2} R_{a2}} k_{c2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}$$

Introduciendo los parámetros del electromecanismo en MatLab se obtienen los valores numéricos de las matrices de estado, entrada, salida y transmisión directa.

A =					B =				C =			D =
0	1.00	0	0	0	0	1.00	0	0	0	0	0	
-1.00	-6.67	0	5.00	23.73	0		0	0	1.00	0	0	0
0	0	0	1.00	0	0							
0	2.50	-1.25	-3.20	0	13.36							

Antes de hacer el diseño de un controlador en el espacio de estado debe verificarse si este es controlable, para lo cual debe verificarse el cumplimiento de la siguiente prueba de controlabilidad (Khalil, 1996; Chen, s/f; Ogata, 2010).

Proposición: El par (A,B), $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad $M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$, $M \in \mathfrak{R}^{n \times np}$, es de rango n (rango fila pleno). (Khalil, 1996)

```
>> rank(ctrb(A,B))
```

ans = 4 % Como el orden del sistema es cuatro y el rango es cuatro queda demostrado que el sistema es controlable.

Como se desea diseñar un servomecanismo en el que cada entrada siga a su respectiva referencia se adiciona dos integradores, x_{i1} y x_{i2} , definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i1} &= Y_{1Ref}(t) - y_1 \\ \dot{x}_{i2} &= Y_{2Ref}(t) - y_2\end{aligned}\quad (14)$$

donde:

$Y_{1Ref}(t)$, $Y_{2Ref}(t)$ posiciones angulares de referencia para los ejes de m_1 y m_2 respectivamente, rad.

El punto sobre las variables indica la derivada temporal, el resto de las variables ya han sido definidas previamente.

Surge la cuestión, ¿el sistema ampliado con los integradores dados por (14) será controlable?, la respuesta está en la siguiente proposición: si el par (A,B) es controlable y la matriz

$A_{amp} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ tiene rango $n+m$ con n orden del sistema y m cantidad de salidas, entonces el sistema ampliado es controlable (Khalil, 1996).

A continuación se verifica usando las funciones de MatLab que el sistema ampliado es controlable.

```
>> rank([A,B;-C,zeros(2,2)])
```

ans = 6 % Como el rango es seis y es igual a la suma del orden del sistema, cuatro, y el número de salidas dos queda demostrado que el sistema ampliado es controlable.

Para asegurar que la ecuación algebraica de Riccati (EAR), que surge del problema de

optimización de horizonte infinito $J = \int_0^\infty \underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} dt$ (Chen, s/f; Ogata, 2010; Lewis Vrabie Syrmos, 2012), tenga solución y esta sea la única positiva definida es que además que el sistema sea controlable cumpla la condición de Kalman (Chen, s/f; Ogata, 2010; Lewis Vrabie Syrmos, 2012) que impone que el par (Aamp,S) sea observable, donde $Q=S^T S$. La matriz Q es una matriz diagonal cuyos elementos son variables, parte de los genes del AG, que toman valores reales positivos.

```
>> Aamp=[A,B;-C,zeros(2,2)];
```

```
>> syms q1 q2 q3 q4 q5 q6
```

```
>> S=blkdiag(q1,q2,q3,q4,q5,q6);
```

```
>> rank([S Aamp'*S (Aamp')^2*S (Aamp')^3*S (Aamp')^4*S (Aamp')^5*S])
```

ans = 6% Como el rango es seis se cumple la condición de Kalman por lo que la EAR tendrá solución única positiva definida.

A este controlador, como el valor absoluto máximo de su salida se considera de 10 V, se le adiciona una estructura anti-saturación por cálculo hacia atrás.

La ley de control dinámica que se obtendrá para el controlador LQR es definida por:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(t) &= - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_{i1} & x_{i2} \end{bmatrix}^T \\
 \dot{x}_{i1} &= Y_{1Ref}(t) - y_1 \\
 \dot{x}_{i2} &= Y_{2Ref}(t) - y_2
 \end{aligned} \tag{15}$$

Se crea en Simulink el diagrama de bloque del controlador que se muestra en la Figura 2a), en el que el parámetro D del bloque Controlador Continuo contiene las primeras cuatro columnas de la matriz de ganancia de realimentación de estado, y en la Figura 2b) se muestra el esquema de simulación del sistema controlado en el que el nombre de cada bloque indica su función. Las salidas del accionamiento, ver Figura 2b), son y_1 y y_2 , visualizadas mediante el bloque Posc, se miden además, la velocidad angular de cada motor y se visualizan con el bloque Vel. Ambos diagramas son utilizados solo en el proceso de optimización.

De la Figura 2b) puede observarse el puerto de salida Out1, el cual permite exportar el valor de la integral de la suma de los valores absolutos de los errores, (IAE), de seguimiento a cada referencia, esta será la función de puntaje, Score del inglés, que será minimizada por el algoritmo genético. El bloque Display IAE muestra el valor del índice IAE.

Para emplear el AG se necesita una función de MatLab que sirva de interface entre el esquema del Simulink y la ventana de comando, para lo cual se elaboró la función que se presenta a continuación.

```
function J=indcomplqr(w)
```

```
%Función para optimizar índice de costo.
```

```
global K
```

```
Q=blkdiag(w(1),w(2),w(3),w(4),w(5),w(6))
```

```
R=blkdiag(w(7),w(8));
```

```
Aa=[0 1 0 0 0 0;-1 -6.6660 0 5 0 0;0 0 0 1 0 0;0 2.5 -1.25 -3.2035 0 0;-1 0 0 0 0 0;0 0 -1 0 0 0];
```

```
Ba=[0 0;23.7302 0;0 0;0 13.3611;0 0;0 0];
```

```
[K,P,E]=lqr(Aa,Ba,Q,R)
```

```
[t,x,y]=sim('ControlLQRmultivariableImple');
```

```
J=y(end);
```

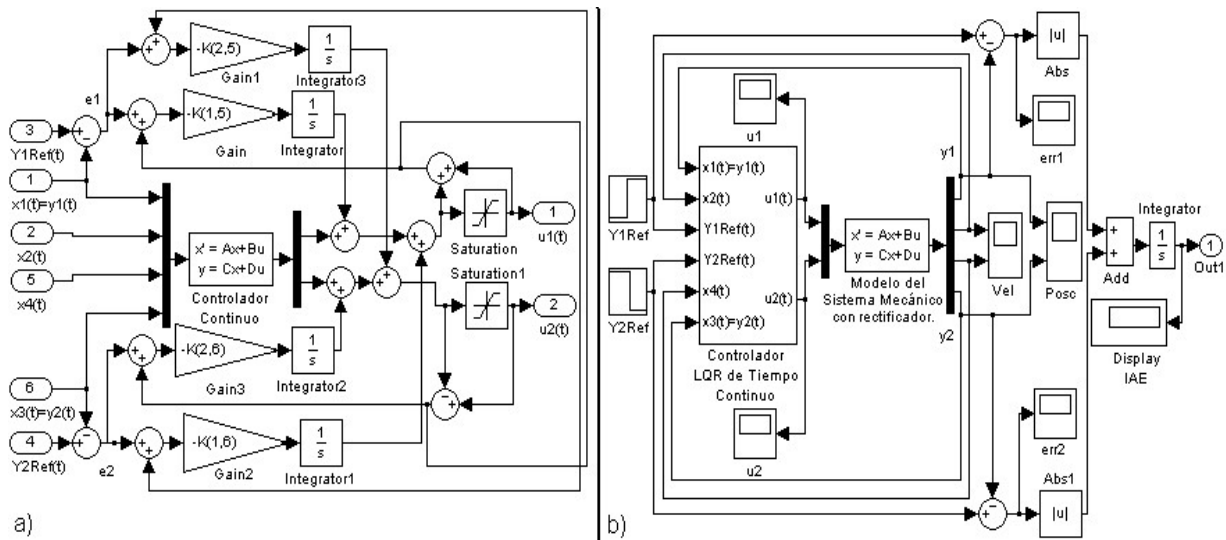


Figura 2. a) Esquema del controlador LQR multivariable con acción integral y estructura anti-saturación, b) Sistema de control a lazo cerrado.

A continuación se ejecutaron las siguientes funciones en la ventana de comando.

```
>> global K
>> opcion=gaoptimset('PopInitRange',[0;1e+6]);
[X,Fval]=ga(@indcomplqr,8,[],[],[],[],[ones(1,8)],[ones(1,4)*20 inf inf 10 10],[],opcion)
```

Las cuales arrojaron los siguientes resultados:

Optimization terminated: average change in the fitness value less than options.TolFun.

$X = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1+6 \ 1+6 \ 1 \ 1$, $Fval = 1.139$

La matriz de ganancia de realimentación es:

$$K = \begin{bmatrix} 73.4752 & 2.4215 & 0.9561 & 0.2278 & -999.8845 & -15.1995 \\ -1.4776 & 0.1283 & 86.4840 & 3.5082 & 15.1995 & -999.8845 \end{bmatrix}$$

Los autovalores del sistema a lazo cerrado son:

$E = -12.4426+19.3659i; -15.5187+21.8362i; -25.2165;$
 $-12.4426-19.3659i; -15.5187-21.8362i; -33.0664$

Luego de finalizado el diseño del controlador se procede al diseño del observador de estado si al menos una variable de estado no estuviera disponible para la medición o estuviera contaminada por el ruido, en este trabajo se considera que se miden las posiciones angulares y que no están disponible las mediciones de las velocidades angulares, llegado a este punto los estudiantes propondrían emplear un observador de orden completo, pero como las variables de estado x_1 y x_3 están linealmente relacionadas con las variables de salida y_1 y y_2 , se propone emplear un observador de orden mínimo, que es además el que más dificultad de diseño presentan los estudiantes.

Para realizar el diseño del observador de estado de orden mínimo se particiona el vector de estado en los vectores de estados medibles $\begin{matrix} x_a \\ - \end{matrix}$ de dimensión m y no medibles $\begin{matrix} x_b \\ - \end{matrix}$ de dimensión $n-m$, convirtiéndose la ecuación de estado y de salida, según Ogata (2010), a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ - \\ \dot{x}_b \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ - \\ x_b \\ - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ - \\ B_b \\ - \end{bmatrix} u \quad (16)$$

$$y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ - \\ x_b \\ - \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde:

A_{aa} matriz $m \times m$, A_{ab} matriz $m \times (n-m)$, A_{ba} matriz $(n-m) \times m$, A_{bb} matriz $(n-m) \times (n-m)$, B_a matriz $m \times p$ y B_b matriz $(n-m) \times p$ e I matriz identidad $m \times m$.

De (Ogata, 2010) se conoce que se podrá diseñar el observador de orden mínimo si la matriz de observabilidad de orden mínimo $N_m = \begin{bmatrix} A_{ab}^T & A_{bb}^T A_{ab}^T & \cdots & (A_{bb}^{n-m-1})^T A_{ab}^T \end{bmatrix}$, es de rango $n-m$.

La ecuación del observador de orden mínimo que se demuestra en (Chen, s/f; Ogata, 2010) es:

$$\dot{\eta} = (A_{bb} - K_e A_{ab}) \eta + \left[(A_{bb} - K_e A_{ab}) K_e + A_{ab} - K_e A_{aa} \right] y + (B_b - B_a K_e) u \quad (18)$$

$$\hat{x}_b = \eta + K_e y \quad (19)$$

donde:

η variable de estado auxiliar de $(n-m) \times 1$, K_e matriz de ganancia del observador de orden mínimo

orden $(n-m) \times m$ y \hat{x}_b valor estimado u observado de $\begin{matrix} x_b \\ - \end{matrix}$.

Debe notarse que en la ecuación de estado y de salida para el diseño del observador (16) y (17) los estados medidos y no medibles están agrupados, por lo cual la ecuación de estado y de salida del sistema electromecánico (12) y (13) debe transformarse a esta forma, para lograr esta agrupación se propone la siguiente transformación de coordenadas no singular.

$$\begin{bmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \\ x_{b3} \\ x_{b4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Para llevar a cabo lo anterior se emplean los siguientes códigos en MatLab que se presentan a continuación:

```
>> sys=ss(A,B,C,D); % creando el modelo del sistema electromecánico en MatLab.
>> T=[1 0 0 0;0 0 1 0;0 1 0 0;0 0 0 1]; % Introduciendo la matriz de transformación de
coordenadas.
>> systrans=ss2ss(sys,T); % Transformando el modelo del sistema a las nuevas variables.
>> Aaa=systrans.a(1:2,1:2); % Obteniendo la matriz Aaa que es nula.
>> Aab=systrans.a(1:2,3:4) % Obteniendo la matriz Aab.
>> Aba=systrans.a(3:4,1:2) % Obteniendo la matriz Aba.
>> Abb=systrans.a(3:4,3:4) % Obteniendo la matriz Abb.
>> Ba=systrans.b(1:2,:) % Obteniendo la matriz Ba que es nula.
>> Bb=systrans.b(3:4,:) % Obteniendo la matriz Bb.
```

Ya con el sistema descrito en estas nuevas variables se emplea la condición de observabilidad en MatLab.

```
>> rank(observ(Abb,Aab))
```

ans = 2 % Como el rango de N_m es igual a la diferencia del orden del sistema, cuatro, y la cantidad de variables medidas, dos, se concluye que el vector estado no medible es observable.

Para la determinación de la matriz de ganancia del observador de orden mínimo se seleccionaron los autovalores: -36.0000 +36.0110i y -36.0000 -36.0110i, cumpliendo el criterio que el observador debe responder de 2 a 5 veces más rápido que la respuesta del sistema a lazo cerrado, se emplea el principio de la dualidad (Kuo, 1996; Khalil, 1996; Chen, s/f; Ogata, 2010) y los siguientes códigos de MatLab.

```
>> [Kem1,PREC] = place(Abb',Aab',P1); % La precisión con que se ubicaron los polos en las
posiciones deseadas es de 15 dígitos después del punto decimal.
>> Kem=Kem1'
```

Kem =

29.3340 -31.0110

38.5110 32.7965

```
>> Aobm=Abb-Kem*Aab; % Matriz de estado del observador, cuyos valores numéricos se
muestran en (21)
```

```
>> Bobm=[Bb, Aobm*Kem+Aba]; % Matriz de entrada del observador, cuyos valores numéricos
se muestran en (21)
```

Diseñado el observador de estado de orden reducido, la ley de control dinámica que se obtiene es:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & \hat{x}_4 & x_{i1} & x_{i2} \end{bmatrix}^T \\
 \dot{x}_{i1} &= Y_{1Ref}(t) - y_1 \\
 \dot{x}_{i2} \frac{d}{dt} &= Y_{2Ref}(t) - y_2 \\
 \dot{\eta} &= \begin{bmatrix} -36.0000 & 36.0110 \\ -36.0110 & -36.0000 \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} 23.7 & 0 & 329.8 & 2297.4 \\ 0 & 13.4 & -2442.7 & -65.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \hat{x}_2 & \hat{x}_4 \end{bmatrix}^T &= \eta + \begin{bmatrix} 29.3340 & -31.0110 \\ 38.5110 & 32.7965 \end{bmatrix} K_e y
 \end{aligned} \tag{21}$$

Se crea en Simulink el diagrama de bloque del controlador dado por (21) y en el que se considera la estructura anti-saturación que se muestra en la Figura 3a), en el que el parámetro D del bloque Controlador Continuo contiene las primeras cuatro columnas de la matriz de ganancia de realimentación de estado y en el bloque Observador Continuo de orden mínimo se ha introducido el modelo de dicho observador.

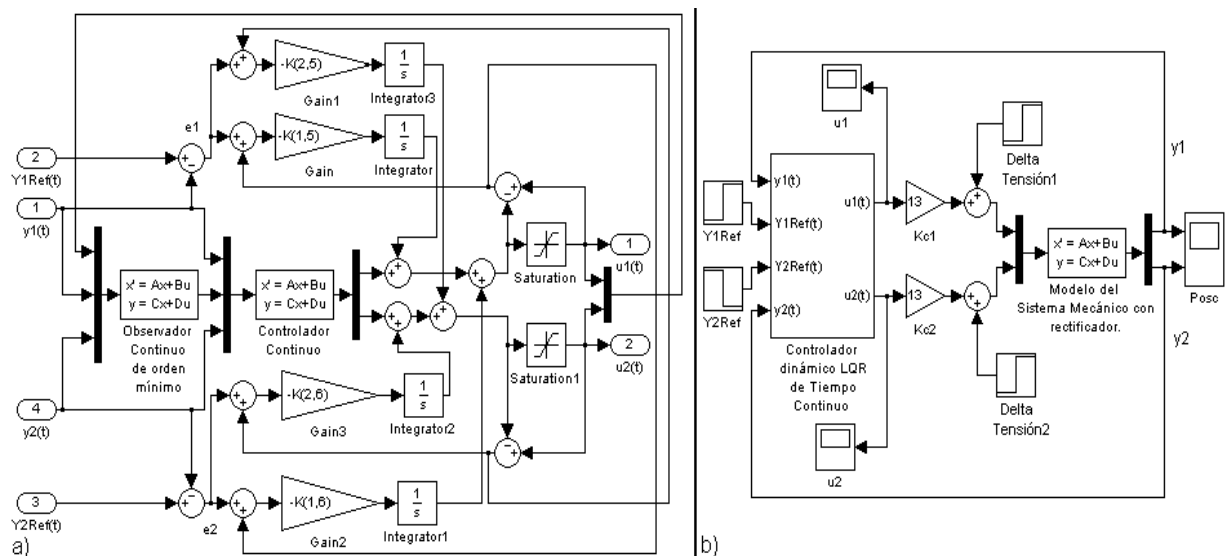


Figura 3. a) Esquema del controlador dinámico LQR multivariable con acción integral, estructura anti-saturación y observador de orden mínimo, b) Sistema de control a lazo cerrado en el que se considera el cambio de la tensión de salida de los amplificadores.

En la Figura 3b) se muestra el esquema de simulación del sistema de control a lazo cerrado, en este para verificar el comportamiento del sistema ante una perturbación en la tensión de alimentación de los amplificadores se han extraído del modelo del sistema electromecánico los amplificadores representados por los bloques \$K_{c1}\$ y \$K_{c2}\$ y a la salida de estos se le suman respectivamente las señales Delta Tensión1= -15 V y Delta Tensión2= 15 V, para representar una disminución brusca, en forma de escalón, de la tensión de salida de los amplificadores de aproximadamente un 12 % de la tensión máxima entregado por estos, lo cual ocurre a los 10 s.

En la Figura 4 se grafican las diferencias entre las variables de estado no medibles y las estimadas mediante el observador de orden mínimo, errores de estimación u observación, introduciéndole a este último el vector de condiciones iniciales $[-1 \ 2]^T$ para comprobar su desempeño. De cada gráfica se observa que los errores de estimación son nulos después de los 0.15 s indicando que cada variable observada reproduce a la variable que estima.

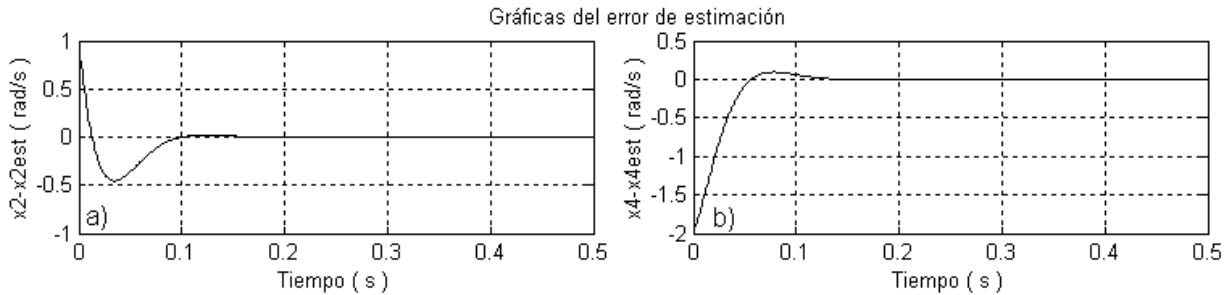


Figura 4. Gráficas de: a) diferencia entre la variable x_2 y su valor observado x_{2est} , b) diferencia entre la variable x_4 y su valor observado x_{4est} .

En la Figura 5 se grafican cada señal de referencia con la correspondiente variable de salida, en esta se observa que se introducen señales en forma de escalón de amplitud 5 rad en el instante 1 s para Y_{1Ref} y de amplitud -2 rad en el instante 5 s para Y_{2Ref} . En ambas gráficas se nota que las señales de salidas alcanzan luego de un transitorio su respectiva señal de referencia. El sobrepaso máximo en y_1 es del 2.8 % en el instante de 1.34 s, el tiempo de establecimiento de y_1 es de 0.378 s. Para y_2 el sobrepaso máximo es del 4.7 % en el instante de 5.281 s, con un tiempo de establecimiento de 0.345 s. Se empleó banda de error del 2%.

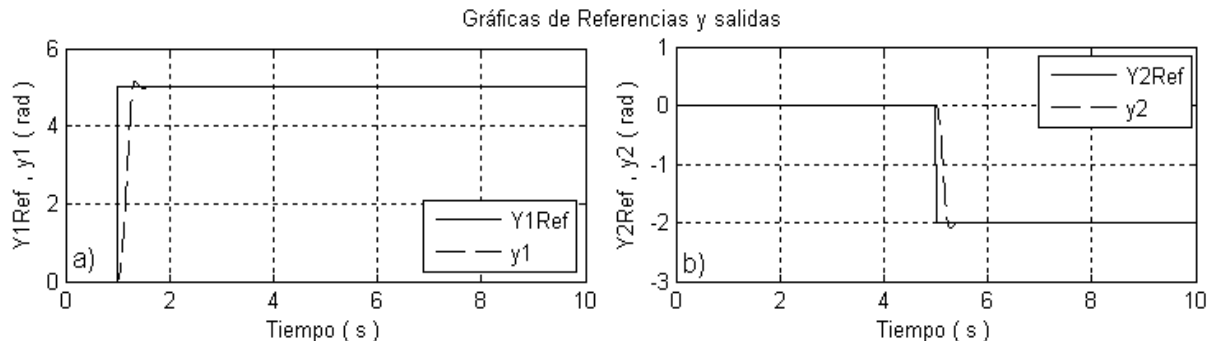


Figura 5. Gráficas de: a) señal de referencia y posición angular de m_1 , b) señal de referencia y posición angular de m_2 .

En la Figura 6 se muestran las ampliaciones realizadas a las gráficas de la Figura 5, para observar el efecto de la interacción que existe en el sistema electromecánico.

En la Figura 6a) se aprecia que la variable y_1 se desvía de su referencia, esto se debe a que el rotor de m_2 gira para seguir el cambio en su referencia y este movimiento se transmite al rotor de m_1 a través del amortiguador viscoso, de modo análogo le sucede al rotor de m_2 , ver Figura 6b), que estando en el valor de su referencia, se desvía de esta porque el amortiguador viscoso le transmite el movimiento que adquiere el rotor de m_1 para alcanzar a su referencia. De la Figura 6 se nota que a pesar de la interacción existente en el accionamiento, el controlador dinámico LQR multivariable logra que cada salida alcance a su respectiva referencia.

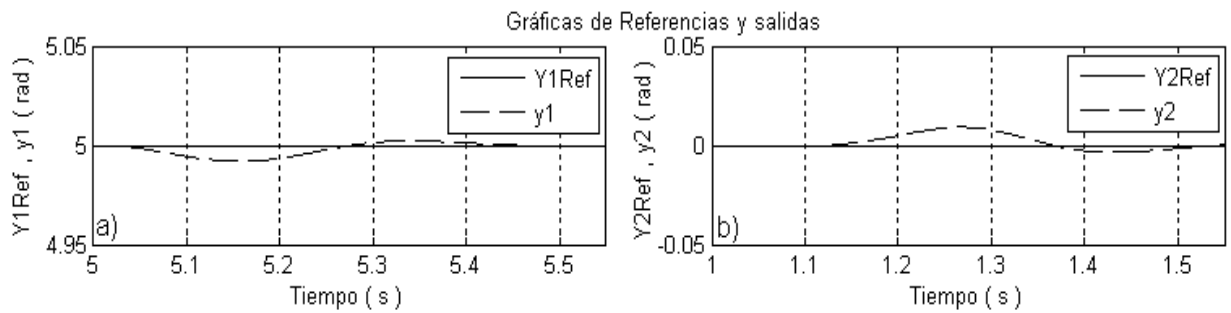


Figura 6. Ampliación de la señal de referencia y de la posición angular: a) de m1, b) de m2.

En la Figura 7, en la que se grafican los errores de seguimiento, diferencia entre cada señal de referencia y su respectiva salida, se corrobora que el controlador logra que cada salida alcance a su referencia independientemente de la interacción a través del acoplamiento viscoso.

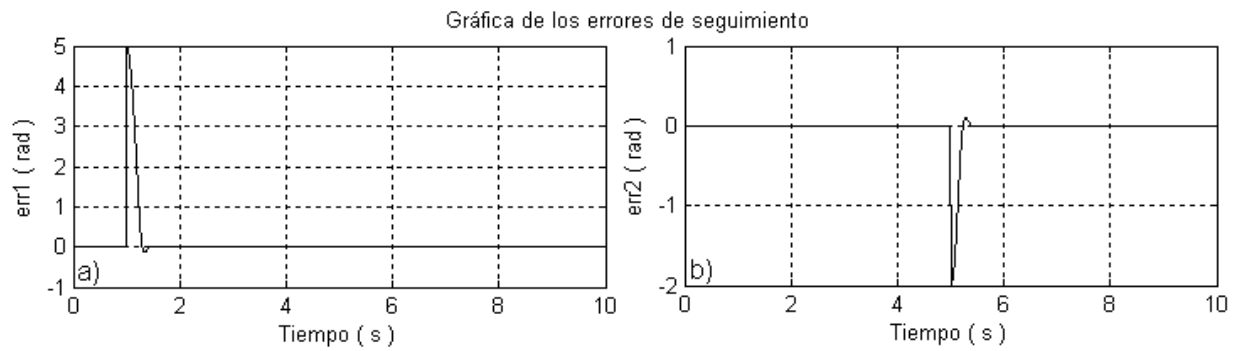


Figura 7. Gráfica de los errores de seguimiento: a) de m1, b) de m2.

En la Figura 8, se muestran las señales de control. En la Figura 8a) se observa que u_1 se satura en el instante en que se produce el escalón en la referencia y la duración de esta saturación es de 0.192 s. De forma análoga sucede con u_2 , ver Figura 8b), que se satura al cambiar la referencia Y_{2Ref} , durante 0.106 s. En estas gráficas se observa que los cambios que se producen en la magnitud de cada señal de control se corresponden con los cambios en la referencia respectiva, para lograr que la variable controlada alcance a su referencia, y debido a la interacción existente en el sistema electromecánico, para retornar la variable controlada a su referencia.

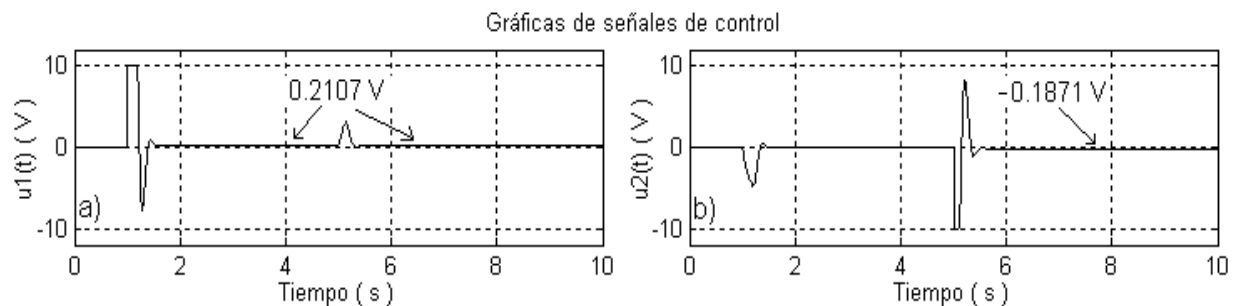


Figura 8. Gráfica de: a) señal de control $u_1(t)$, b) señal de control $u_2(t)$.

El valor de cada señal de control cuando el sistema alcanza el estado estacionario (e.e.) se determina como:

$$u_{1e.e.} = \frac{\theta_{1e.e.} R_{a1} k_1}{k_a \phi_1 k_{c1}} = \frac{5 \text{ rad} \cdot 5 \Omega \cdot 1 \text{ N/m}}{0.9127 \text{ Vs/rad} \cdot 13} = 0.2107 \text{ V} \quad (22)$$

$$u_{2e.e.} = \frac{\theta_{2e.e.} R_{a2} k_2}{k_a \phi_2 k_{c2}} = \frac{-2 \text{ rad} \cdot 0.33 \Omega \cdot 2.5 \text{ N/m}}{0.6845 \text{ Vs/rad} \cdot 13} = -0.1871 \text{ V} \quad (23)$$

Valores que se corresponden con los mostrados en cada gráfica de la Figura 8.

Es importante notar que a pesar de la saturación del controlador multivariable LQR, éste no pierde control sobre la planta debido a la estructura anti-saturación implementada. Para demostrar de forma gráfica la utilidad de la estructura anti-saturación se simulará nuevamente el esquema de la Figura 3b) en la que el único cambio realizado es eliminar la anti-saturación y se grafican las salidas del sistema en la Figura 9.



Figura 9. Gráficas de: a) señal de referencia y posición angular de m_1 , b) señal de referencia y posición angular de m_2 .

En la Figura 9 se demuestra mediante las gráficas que al eliminar la estructura anti-saturación el sistema a lazo cerrado se vuelve inestable. Una medida numérica de la importancia de implementar la estructura anti-saturación es dada por el índice IAE que al eliminar esta estructura el índice toma el valor de 298.1 para un tiempo de simulación de 10 s.

A continuación, se verifica el comportamiento del sistema de control diseñado ante la perturbación descrita en la sección anterior, disminución de la tensión de alimentación de los amplificadores, lo que produce una disminución en la tensión de salida de estos y como consecuencia que las variables controladas se desvíen de su referencia.

En la Figura 10 se muestran las gráficas, ampliadas, de cada salida del sistema junto a su referencia cuando actúa la perturbación sobre el sistema.



Figura 10. Ampliación de: a) señal de referencia y posición angular de m_1 , b) señal de referencia y posición angular de m_2 .

De la Figura 10 se observa la desviación de cada posición angular respecto a su referencia, debido a la disminución de la tensión de salida de cada amplificador de potencia, y que el controlador dinámico LQR diseñado logra que ambas posiciones angulares retornen hacia su valor de referencia luego de un transitorio, con una desviación máxima no superior a 0.03 rad para m_1 y para m_2 .

CONCLUSIONES

Se diseñó un controlador óptimo LQR multivariable de tiempo continuo con acción integral con estructura anti-saturación mediante algoritmo genético y observador de orden mínimo para el control de la posición angular en un sistema electromecánico multivariable, en el que existe interacción entre sus componentes, empleando las funciones de la caja de herramienta de control óptimo del paquete de programa profesional MatLab. Se evaluó, mediante simulaciones, el desempeño del controlador dinámico LQR obteniéndose que: el observador de orden mínimo reproduce las variables no medibles, que cada variable controlada alcanza a su referencia independientemente de la interacción existente en el sistema electromecánico y de la perturbación, lográndose tiempos de establecimiento y sobrepasos máximos inferiores a 0.38 s y 4.8 % respectivamente para cambios en la referencia en forma de escalón y eliminar la estructura anti-saturación provoca la inestabilidad del sistema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acevedo, B. Fonseca, J. y Gómez, J. de (2014). Desarrollo de una herramienta en Matlab para Sintonización de Controladores PID, utilizando algoritmos genéticos basados en técnicas de optimización multiobjetivo. SENNOVA. 1(1), 80-103.
- Ayuda del MatLab 7.12.
- Bauza, I. (2011). Programa Analítico de la Asignatura Ingeniería de control II. Universidad de Oriente. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Departamento de Control Automático. Santiago de Cuba. Cuba.
- Bory, H. (2011). Programa Analítico de la Asignatura Accionamiento Eléctrico. Universidad de Oriente. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Departamento de Control Automático. Santiago de Cuba. Cuba.
- Bory, H. (2016). Propuesta de la Asignatura Las máquinas Eléctricas y sus accionamientos para el Plan E. Universidad de Oriente. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Departamento de Control Automático. Santiago de Cuba. Cuba.
- Bory, H. Chang, F. y Santos, J. de (2016). Diseño y evaluación de un controlador de posición óptimo para electromecanismo multivariable. CIENCIAS HOLGUÍN. 22(1), 100-113. ISSN: 1027-2127.
- Bory, H. Chang, F. y Yero, J. de (2014). Diseño de un Controlador LQG de Tiempo Discreto para el Control de Posición en un Sistema Electromecánico Multivariable. I CONVENCIÓN INTERNACIONAL DE CIENCIAS TÉCNICAS. Universidad de Oriente, Cuba. ISBN: 978-959-207-529-0.
- Bory, H. y Chang, F. (2015). Una actualización sobre la fricción, su compensación y métodos de control en sistemas electromecánicos. Monografía. ISSN: 978-959-207-560-3.
- Bory, H. y Chang, F. de (2016). Diseño y Evaluación de un Controlador de Posición Óptimo de Tiempo Continuo para un Electromecanismo Multivariable. II CONVENCIÓN INTERNACIONAL DE CIENCIAS TÉCNICAS. Universidad de Oriente, Cuba. ISBN: 978-959-207-562-7.
- Chen, (s/f). Introducción al Control Óptimo. (en línea). Disponible en: <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut2/clases/Cap9.pdf>
- Chen, D. y otros (2014). Discrete-Time Linear Quadratic Optimal Control with Fixed and Free Terminal State via Double Generating Functions. (CD-ROM) En: 19th WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL. Cape Town South Africa.
- Costa, A. y Bonne, F. (1989). Principios Fundamentales de Accionamiento Eléctrico. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.
- Espitia, H. y Sierra, F. de (2013). Diseño e implementación de controladores análogos para un seguidor solar. VISIÓN ELECTRÓNICA. 7(1), 118-132.
- González, F. (2015). Uso de matlab (rtw) para controles de motores de corriente directa. Holguín: CIENCIAS HOLGUÍN (en línea). Disponible en: <http://www.ciencias.holguin.cu/index.php/cienciasholguin/article/view/715/587>. [Consultado el 7 de abril 2015]. ISSN: 1027-2127.
- Halliday, D., Resnick, y Krane, K. (2003). Física. La Habana: Félix Varela.
- Hernández, T. y otros de (2011). Application of Genetic Algorithms for Parameter Estimation in Liquid Chromatography. RIELAC. 32(3), 13-20. ISSN: 1815-5928.
- Hespanha, J. (2007). Undergraduate Lecture Notes on LQG/LQR controller design.
- Hwi-Beom, S. y Jong-Gyu, P. de (2012). Anti-Windup PID Controller With Integral State Predictor for Variable-Speed Motor Drives. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS. 59(3), 1509-1516. DOI: 10.1109/TIE.2011.2163911.

- Izadbakhsh, A. y otros de (2011). A Robust Anti-Windup Control Design for Electrically Driven Robots - Theory and Experiment. *INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, AUTOMATION, AND SYSTEMS*. 9(5), 1005-1012. DOI 10.1007/s12555-011-0524-5.
- Kadlic, B. Sekaj, I. y Pernecký, D. (2014). Design of Continuous-time Controllers using Cartesian Genetic Programming. (CD-ROM) En: 19th WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL. Cape Town South Africa.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. EEUU: Prentice Hall.
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de Control Automático*. México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A. ISBN: 968-880-723-0.
- Lewis, F. Vrabie, D. y Syrmos, V. (2012). *Optimal Control*. EEUU: John Wiley & Sons. ISBN 978-1-118-12266-2.
- López, C. de (2014). Evaluación de desempeño de dos técnicas de optimización bio-inspiradas: Algoritmos Genéticos y Enjambre de Partículas. *TEKHNĚ*. 11(1), 49-58. ISSN: 1692-8407.
- Mazaira, I. (2011 a). Programa Analítico de la Asignatura Ingeniería de control I. Universidad de Oriente. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Departamento de Control Automático. Santiago de Cuba. Cuba.
- Mazaira, I. (2011 b). Programa Analítico de la Asignatura Ingeniería de control II. Universidad de Oriente. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Departamento de Control Automático. Santiago de Cuba. Cuba.
- Morera, M. (1994). *Accionamiento Eléctrico Automatizado II*. La Habana: Pueblo y Educación. ISBN: 959-13-0312-2.
- Nagarkar, M. y Vikhe, G. de (2016). Optimización del regulador lineal cuadrático (LQR) del sistema de control de suspensión de coche usando el algoritmo genético. *INGENIERÍA E INVESTIGACIÓN*. 36(1), 23-30. DOI: <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v36n1.49253>.
- Neto, A. Damo, T. y Coelho, A. de (2012). Laboratory Essay with Online Back-calculation Anti-windup Scheme for a MTG System. *IFAC PROCEEDINGS VOLUMES*. (45), 104-109.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid: Pearson Education Hall. ISBN: 978-84-8322-660-5.
- Robet, P. y Gautier, M. (2014). Cascaded loops control of DC motor driven joint including an acceleration loop. (CD-ROM) En: 19th WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL. Cape Town South Africa.
- Sears, F. y otros. (2008). *Física Universitaria*. La Habana: Félix Varela.
- Silva, E. Maass, A. y Vargas, F. (2014). Optimal design of remote controllers for LTI plants over erasure channels. (CD-ROM) En: 19th WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL. Cape Town South Africa. August 24-29.
- Smilgevičius, A. Rinkevičienė, R. y Savickienė, Z. de (2006). Operation of Electric Motor with Elastic Load. 6(70), 15-18. ISSN: 1392-1215.
- Szabat, K. y Orłowska-Kowalska, T. de (2008). Performance Improvement of Industrial Drives With Mechanical Elasticity Using Nonlinear Adaptive Kalman Filter. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*. 55(3), 1075-1084.
- Thomsen, S. Hoffmann, N. y Wilhelm, F. de (2011). PI Control, PI-Based State Space Control, and Model-Based Predictive Control for Drive Systems With Elastically Coupled Loads—A Comparative Study. 58(8), 3647-3657. DOI: 10.1109/TIE.2010.2089950.
- Vera, A. y Morán, A. (s/f). Control de Posición Multi-Objetivo de un Brazo Robot Antropomórfico Usando Algoritmos Genéticos. (en línea). Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Antonio_Moran9/publication/271217754_Multi-Objective_Position_Control_of_a_Robot_Arm_Using_Genetic_Algorithms_Spanish/links/54c30f260cf2911c7a4ab525.pdf?origin=publication_detail. [Consultado el 7 de abril 2015].